

## WHITEPAPER

### ALGORITMO CONTRIBUTO MENSILE AUTOMATICO

L'obiettivo dell'algoritmo alla base della funzionalità del Contributo Mensile automatico è quello di fornire al cliente, che investe un determinato importo con cadenza periodica attraverso un piano di accumulo, un portafoglio di investimento in ETF.

In base al questionario comportamentale, il cliente verrà direzionato verso il portafoglio che maggiormente riflette la sua propensione al rischio nello spettro dei portafogli offerti da MoneyFarm (i portafogli strategici SAA).

Siccome l'ammontare investito dal cliente non permetterà, soprattutto nei primi mesi, di acquistare le quote degli ETF necessarie a ricostruire esattamente l'allocazione dei portafogli MoneyFarm, si pone il problema di quante quote di ogni strumento comprare durante il periodo di accumulo del capitale. Tale problema è risolto tramite un algoritmo sviluppato internamente che permette la costruzione di un portafoglio che gradualmente andrà a coincidere con il portafoglio target sia in termini di composizione sia di rischiosità.

### FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA NELLA FORMA DI UN ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE

#### *L'idea*

L'obiettivo fondamentale dell'algoritmo sarà quello di portare il portafoglio del cliente verso i portafogli target MoneyFarm:

$$w_j^{\text{act}} \rightarrow w_j^{\text{tgt}}$$

ove  $w_j$  è la percentuale del portafoglio investita sullo strumento  $j$ ,  $\text{act}$  è il label del portafoglio del cliente e  $\text{tgt}$  il label del portafoglio target.

Ad ogni modo, vorremmo che la rischiosità del portafoglio del cliente non si discosti troppo dal rischio del portafoglio target che gli è stato assegnato attraverso il questionario:

$$\sigma^{\text{act}} \sim \sigma^{\text{tgt}}$$

ove  $\sigma$  indica la deviazione standard del portafoglio. Tale obiettivo viene raggiunto minimizzando la volatilità dei rendimenti del portafoglio differenza (“tracking error volatility”).

Occorre dunque determinare il numero ottimale di quote di ogni ETF da acquistare ove l’ottimalità è determinata dalla convergenza in termini di allocazione e rischiosità rispetto al portafoglio target. Ci sono ulteriori vincoli che vanno rispettati nel processo di ricerca del numero di quote ottimale.

### I vincoli

1. Il numero di quote di ogni ETF deve essere intero e positivo:

$$\delta_j^{\text{act}} \in \mathbb{N}^+$$

2. Imponiamo che la liquidità del portafoglio del cliente sia almeno pari al 2.5% dell’ammontare investito:

$$\text{cash}^{\text{act}} \geq 2.5\%$$

3. Nel processo di costruzione del portafoglio non consentiamo che siano chiuse delle posizioni per evitare un elevato turnover. Pertanto il numero di quote di ogni ETF presenti al tempo  $t$  nel portafoglio del cliente ad ogni tempo sarà maggiore o uguale a quelle presenti al tempo  $t - 1$ :

$$\delta_j^{\text{act}} \geq \delta_{j,t-1}^{\text{act}}$$

4. Ciascuna operazione di acquisto/vendita genera dei costi di transazione. Pertanto occorre bilanciare il numero di operazioni in maniera tale da limitare il costo totale delle transazioni. Il limite massimo per il numero complessivo di operazioni è quindi definito nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{Positions}}} t_j^{\text{act}} \leq \text{Arrotonda per eccesso} \left( \text{PAC} * \frac{\text{Commissioni di consulenza}}{\text{Costo per operazione}} \right)$$

### L'algoritmo

In definitiva, l'algoritmo è il seguente:

$$\delta_j^{\text{act}} = \underset{\delta_j^{\text{act}}}{\text{argmin}} \left( \sum_{j=1}^{N_{\text{Positions}}} (w_j^{\text{act}} - w_j^{\text{tgt}})^2 + (w^{\text{act}} - w^{\text{tgt}})' * \text{Sigma} * (w^{\text{act}} - w^{\text{tgt}}) \right), j = 1, \dots, N_{\text{Positions}}$$

con i vincoli:

$$\begin{aligned} \delta_j^{\text{act}} &\in \mathbb{N}^+ \\ \text{cash}^{\text{act}} &\geq 2.5\% \\ \delta_j^{\text{act}} &\geq \delta_{j,t-1}^{\text{act}} \\ \sum_{j=1}^{N_{\text{Positions}}} t_j^{\text{act}} &\leq \text{Arrotonda per eccesso} \left( \text{PAC} * \frac{\text{Commissioni di consulenza}}{\text{Costo per operazione}} \right) \end{aligned}$$

In sintesi:

L'algoritmo va alla ricerca del numero di quote di ogni ETF da acquistare cercando di ottenere un'allocazione ed una rischiosità quanto più possibile prossime a quella del portafoglio target. Nel fare ciò si tiene presente che il numero di quote di ogni ETF da acquistare è sempre intero e positivo, e che ci sia sempre abbastanza liquidità nel portafoglio. Infine, per evitare di incorrere in costi di transazione elevati, non è permessa la vendita di quote.

## LE VARIABILI IN GIOCO

### *Input*

$RU_{per}$  : numero di mesi di “rump-up”  
[positive integer]

PAC: ammontate depositato mensilmente  
[positive real]

$W$  : ammontare disponibile per l’investimento (controvalore del portafoglio + quota mensile del PAC)  
[positive real]

$N_{ETF}$ : numero di ETF nel portafoglio target  
[positive integer]

$N_{Positions} \equiv (N_{ETF} + 1)$ : numero complessivo di posizioni considerando la presenza del cash  
[positive integer]

$w_j^{tgt}$ : allocazione percentuale sulla posizione  $j$  nel portafoglio target ( $j=1, \dots, N_{Positions}$ )  
[row array  $1 \times N_{Positions}$ ]

$w_j^{act}$ : allocazione percentuale sullo strumento  $j$ mo nel portafoglio del cliente ( $j=1, \dots, N_{Positions}$ )  
[row array  $1 \times N_{Positions}$ ]

$$w_j^{act} = \frac{\delta_j^{act} P_j}{W}, j = 1, \dots, N_{ETF}$$

$$w_{(N_{ETF}+1)}^{act} = \text{cash}^{act} = \frac{W - \sum_{j=1}^{N_{ETF}} \delta_j^{act} P_j}{W}$$

$P_j$ : prezzo corrente dello strumento  $j$  ( $j=1, \dots, N_{ETF}$ ) mentre il “prezzo” del cash è fissato a 0  
[row array  $1 \times N_{Positions}$ ]

Sigma\_est\_window: orizzonte temporale su cui stimare la matrice di Varianza-Covarianza dei rendimenti (ad esempio se Sigma\_est\_window = 31 verranno utilizzati le quotazioni mensili degli ultimi 31 mesi degli ETF)  
[positive integer]

Prices: matrice degli ultimi Sigma\_est\_window prezzi mensili degli strumenti in portafoglio  
[matrix Sigma\_est\_window  $\times$   $N_{Positions}$ ]

Returns: matrice dei rendimenti degli strumenti in portafoglio (ovviamente l'ultima colonna sarà di zeri in quanto il cash non ha rendimento)

[matrix (Sigma\_est\_window-1) x N<sub>positions</sub>]

$$\text{Returns}_{t,j} = \ln\left(\frac{\text{Price}_{t,j}}{\text{Price}_{t-1,j}}\right)$$

$\Sigma$ : Matrice di Varianza-Covarianza dei rendimenti degli strumenti

[matrix (N<sub>ETF</sub> + 1) x (N<sub>ETF</sub> + 1)]

$$\Sigma = \text{cov}(\text{Returns})$$

$\delta_{j,t-1}^{\text{act}}$ : numero di quote dell'ETF j nel portafoglio del cliente (j= 1, ..., N<sub>ETF</sub>) al tempo precedente all'ottimizzazione

[row array 1 x N<sub>ETF</sub>]

$t_j^{\text{act}}$ : variabile binaria che identifica gli strumenti l'algoritmo genera una operazione di acquisto

$$t_j^{\text{act}} = 1 \text{ se } \delta_j^{\text{act}} > \delta_{j,t-1}^{\text{act}}, 0 \text{ altrimenti}$$

## Output

$\delta_j^{\text{act}}$ : numero di quote dell'ETF j che il cliente deve acquistare (j= 1, ..., N<sub>ETF</sub>)

[row array 1 x N<sub>ETF</sub>]